ÁLGEBRA- SISTEMAS POR EL MÉTODO DE GAUSS FICHA 1

1) Discute mediante el método de Gauss los siguientes sistemas, según el valor del parámetro a:

a) $\left.\begin{array}{l} x-3y+2z=0 \\ 2x+y-z=2 \\ -x+ay+z=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=-3 \\ x-2y+2z=1 \\ 2x+y+az=5 \end{array}\right\}$

2) Discute mediante el método de Gauss los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros a y b:

$\left.\begin{array}{l} 3x-y=2 \\ 2x+ay=b \end{array}\right\}$

3) Aplicando el método de Gauss discute el siguiente sistema según el valor de k y resuélvelo en los casos que proceda:

$\left.\begin{array}{l} x+2z=6 \\ 3x+y=0 \\ 2x+kz=12 \end{array}\right\}$

SOLUCIONES

1) a) $\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=0 \\ 2x+y-z=2 \\ -x+ay+z=3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & a & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & a-3 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$

$\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & a-3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[5F_3]{3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 21 & 6 \\ 0 & 15 & 5a-15 & 15 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 21 & 6 \\ 0 & 0 & 5a+6 & 21 \end{array}\right) \Rightarrow si\ 5a+6=0$ el sistema es incompatible, es decir:

$si\ a=-\dfrac{6}{5} \Rightarrow$ Sistema incompatible

$si\ a \neq -\dfrac{6}{5} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado

b)

$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=-3 \\ x-2y+2z=1 \\ 2x+y+az=5 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & a & 5 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[F_3-2F_1 \to F_3]{2F_1-F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & a-4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & a+1 & 8 \end{pmatrix}$

$si\ a=-1 \Rightarrow$ Sistema incompatible

$si\ a \neq -1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado

2) $\left.\begin{array}{r} 3x-y=2 \\ 2x+ay=b \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[-3F_2]{2F_1} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -6 & -3a & -3b \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & -3a-2 & -3b+4 \end{pmatrix}$

deducimos entonces que:

si $-3a-2=0=-3b+4$ el sistema es compatible indeterminado

si $-3a-2=0 \quad -3b+4 \neq 0$ el sistema es incompatible

si $-3a-2 \neq 0$ el sistema es compatible determinado

O sea:

$si \quad a=-\dfrac{2}{3}\ y\ b=\dfrac{4}{3}$ sistema compatible indeterminado

$si \quad a=-\dfrac{2}{3}\ y\ b \neq \dfrac{4}{3}$ sistema incompatible

$si \quad a \neq -\dfrac{2}{3}$ sistema compatible determinado

$$3)\ \left.\begin{array}{l} x+2z=6 \\ 3x+y=0 \\ 2x+kz=12 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & k & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & k-4 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $k-4=0$, es decir si $k=4 \rightarrow$ sistema compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{l} x+2z=6 \\ y-6z=-18 \end{array}\right\} z=\lambda \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=6-2\lambda \\ y=-18+6\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \text{Solución}$$

Si $k-4\neq 0$, es decir si $k\neq 4 \rightarrow$ sistema compatible determinado:

$(k-4)z=0 \Rightarrow z=0 \rightarrow y-6z=-18 \Rightarrow y=-18$; $x+2z=6 \Rightarrow x=6$

$$\left.\begin{array}{l} x=6 \\ y=-18 \\ z=0 \end{array}\right\} \text{Solución}$$